1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]
LIBRETA: [redacted] TURNO: 14 a 17 19 a 22 **TEMA 1**

Algebra Lineal - Primer Cuatrimestre 2013
Primer Parcial (18/05/2013)

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B}$ una base de V tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k & 2 & k^2 & k+1 \\ 0 & 4 & 1 & 3-k \\ 1 & 0 & 2k & 4k+3 \end{pmatrix}$.
Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$.

2. Sean $S = \{p \in \mathbb{R}_3[X] / p(1) = p'(-1) = 0\}$ y $T = \langle -3X^3 + X^2 + 2X,\ X^3 - 1 \rangle$ subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ tal que $f(S) = T$, $f(T) = S$ y f no sea un isomorfismo.

3. Sean V un K-espacio vectorial y $f, g \in \mathrm{End}(V)$ proyectores tal que $f \circ g = g \circ f$, probar que:
   a) $f \circ g$ es proyector.
   b) $Im(f \circ g) = Im(f) \cap Im(g)$.
   c) $Nu(f \circ g) = Nu(f) + Nu(g)$.

4. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Recordemos que se define la transformación lineal $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:
$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \qquad \forall \varphi \in W^*.$$
f^t se llama la función *transpuesta* de f.
   a) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$.
   b) Sean $v \in V$ no nulo y $T : V \longrightarrow V$ una trasformación lineal tal que $T(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in K$. Probar que existe $\varphi \in V^*$ no nulo tal que $T^t(\varphi) = \lambda\varphi$.
   (Sug.: considerar la transformación lineal $T - \lambda Id$).

5. Sea $\mathbb{C}_2[X]$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
   a) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que:
$$\langle f, g \rangle = k f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$
   es un producto interno en $\mathbb{C}_2[X]$.
   b) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ una base de $\mathbb{C}_2[X]$. Para los $k \in \mathbb{R}$ hallados en el ítem anterior, calcular la matriz del producto interno en esa base. ¿Es $\mathcal{B}$ una base ortogonal?
   c) Para $k = 4$, hallar la distancia entre el polinomio constante $p \equiv 1$ y el subespacio $\langle X, X^2 \rangle$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

jercicio nº1:

Hallemos el Nu(f). Sea $v \in Nu(f) \Rightarrow f(v)=0 \Rightarrow [f]_B [v]_B^t = 0$, $[v]_B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k & 2 & k^2 & k+1 \\ 0 & 4 & 1 & 3-k \\ 1 & 0 & 2k & 4k+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_1 \to F_4]{F_2 - kF_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3-k \\ 0 & 0 & k & 4k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_2 \to F_3]{\frac{1}{2}F_2 \to F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & k & 4k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - kF_3 \to F_4]{F_1 - kF_3 \to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2-k+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+3k+2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

- Si $k^2+3k+2 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, y entonces $[v]_B^t = 0 \Rightarrow v = 0$. Luego $Nu(f) = \{0\}$, entonces f es un monomorfismo. Como además es un endomorfismo tenemos que f es un isomorfismo, en particular f es un epimorfismo $\Rightarrow Im(f) = \mathbb{V}$. Luego:

$$\mathbb{V} = \{0\} \oplus \mathbb{V} = Nu(f) \oplus Im(f).$$

- Si $k^2+3k+2 = (k+1)(k+2) = 0 \Rightarrow k = -1 \vee k = -2$.
  - Si $k=-1$: (*) queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow v \in Nu(f) \Leftrightarrow [v]_B^t = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4(-3, -\frac{1}{2}, -2, 1) = (-\frac{1}{2}x_4)(6, 1, 4, -2)$

$\Rightarrow [Nu(f)]_B = \langle (6,1,4,-2) \rangle$. Veamos si $(6,1,4,-2) \in [Im(f)]_B$, es decir si $\exists v \in V / [f(v)]_B^t = [f]_B [v]_B^t = (6,1,4,-2)^t$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1 \to F_4]{F_2 + F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 + F_3 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible $\Rightarrow (6,1,4,-2) \notin [Im(f)]_B$

Por el Teorema de la dimensión para t.l.

enemos que $Im(f)$ es un hiperplano en V, y como $[v_0]_B = (6,1,4,-2) \notin [Im(f)]$ $\Rightarrow v_0 \notin Im(f)$ (y por un ejercicio de la práctica 2):

$$Im(f) \oplus \langle v_0 \rangle = V \Rightarrow Im(f) \oplus Nu(f) = V.$$

- si $k=-2$: (*) queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases}$$

Entonces $v \in Nu(f) \Leftrightarrow [v]_B = (-7x_4, -\frac{1}{2}x_4, -3x_4, x_4) = (-\frac{1}{2}x_4)(14,1,6,-2)$

$\Rightarrow [Nu(f)]_B = \langle (14,1,6,-2) \rangle$. Veamos si $(14,1,6,-2) \in [Im(f)]_B$, o sea,

si $\exists v \in V \ / \ [f(v)]_B = [f]_B [v]_B^t = (14,1,6,-2)^t$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 14 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1 \to F_4]{F_2 + 2F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -16 \end{array}\right) 29 \xrightarrow{F_3 - 2F_2 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -44 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -16 \end{array}\right) -52 \xrightarrow{F_4 + 2F_3 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -104 \end{array}\right) -120$$

El sistema es incompatible $\Rightarrow (14,1,6,-2) \notin [Im(f)]_B$. Por un razonamiento análogo al caso anterior, tenemos que si $[v_1]_B = (14,1,6,-2)$, entonces:

$$Im(f) \oplus \langle v_1 \rangle = V \Rightarrow V = Nu(f) \oplus Im(f)$$

Entonces la propiedad vale para todo $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio nº2: (2)

Hallemos $S\cap T$. Sea $p \in S\cap T \Rightarrow p\in S \wedge p \in T$, luego:

- $p\in T$: $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} /$ $p = a_1(-3x^3+x^2+2x)+a_2(x^3-1) = (-3a_1+a_2)x^3+a_1x^2+2a_1x-a_2$

- $p\in S$: $p'(x) = a_1(-9x^2+2x+2)+a_2(3x^2)$

$0 = p(1) = a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 = 0$

$0 = p'(1) = a_1\cdot(-9)+a_2\cdot 3 \Rightarrow -9a_1+3a_2=0 \Rightarrow a_2 = 3a_1$.

Entonces $p\in S\cap T$ sii $p = (-3a_1+3a_1)x^3+a_1x^2+2a_1x-3a_1 = a_1(x^2+2x-3)$

$\Rightarrow S\cap T = \langle x^2+2x-3\rangle$.

Extendamos a $\{x^2+2x-3\}$ a una base de T. Basta tomar x^3-1 que es l.i. con x^2+2x-3 (porque no son múltiplos uno del otro) y como $\dim(T)=2$.

y $\langle x^2+2x-3, x^3-1\rangle \subseteq T$ $\wedge$ $\dim(\langle x^2+2x-3, x^3-1\rangle)=2 \Rightarrow$

$$T = \langle x^2+2x-3, x^3-1\rangle.$$

Donde $\{x^2+2x-3, x^3-1\}$ es una base de T.

Extendamos a $\{x^2+2x-3\}$ a una base de S. Sea $p\in\mathbb{R}_3[x]$, $p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tal que $p\in S$, entonces:

$$\begin{array}{l} p(1)=0 \Rightarrow (\mathrm{I})\ a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ p'(1)=0 \Rightarrow (\mathrm{II})\ a_1-2a_2+3a_3=0 \end{array} \xrightarrow{(\mathrm{I})-(\mathrm{II})} \begin{cases} a_0+3a_2-2a_3=0 \\ a_1-2a_2+3a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=-3a_2+2a_3 \\ a_1=2a_2-3a_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = (-3a_2+2a_3)+(2a_2-3a_3)x+a_2x^2+a_3x^3 =$

$= a_2(-3+2x+x^2)+a_3(2-3x+x^3) \Rightarrow S = \langle \underbrace{x^2+2x-3}_{\in S\cap T}, 2-3x+x^3\rangle$.

Entonces $\{x^2+2x-3, x^3-3x+2\}$ es una base de S que contiene una base de $S\cap T$. Luego:

$$H = \langle x^2+2x-3, x^3-3x+2, x^3-1\rangle \subseteq S+T.$$

$\dim(H)=3$. ($H = \langle \underbrace{x^2+2x-3}_{p_1}, \underbrace{x^3-3x+2}_{p_2}, \underbrace{x^3-1}_{p_3}\rangle = \langle x^2+2x-3, -3x+3, x^3-1\rangle$ 3 polinomios de distinto grado).

Por el Teorema de la dimensión:

$$\dim(S+T) = \dim(S)+\dim(T)-\dim(S\cap T) = 2+2-1 = 3$$

Luego $H\subseteq S+T$ y $\dim(S+T) = \dim(H) = 3 \Rightarrow H = S+T$

$$\Rightarrow S+T = \langle x^2+2x-3, x^3-3x+2, x^3-1\rangle$$

Extendamos a $\{x^2+2x-3, x^3-3x+2, x^3-1\}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$. Afirmamos que basta tomar el polinomio "1", es decir, afirmamos que $\{x^2+2x-3, x^3-3x+2, x^3-1, 1\}$ es l.i. y como $\dim(\mathbb{R}_3[x])=4$, es una base de $\mathbb{R}_3[x]$. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in\mathbb{R}$ /

$= a_1(x^2+2x-3)+a_2(x^3-3x+2)+a_3(x^3-1)+a_4\cdot 1 = 0$

$= (-3a_1+2a_2-a_3+a_4)+(2a_1-3a_2)x+a_1x^2+(a_2+a_3)x^3$

Queda el siguiente sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 = 0 \ (\mathrm{I}) \xRightarrow{(\mathrm{IV}'),(\mathrm{III}),(\mathrm{II}')} a_4 = 0. \\ 2a_1 - 3a_2 = 0 \ (\mathrm{II}) \xRightarrow{(\mathrm{III})} a_2 = 0 \ (\mathrm{II}') \\ a_1 = 0 \ (\mathrm{III}) \\ a_2 + a_3 = 0 \ (\mathrm{IV}) \xRightarrow{(\mathrm{II}')} a_3 = 0 \ (\mathrm{IV}') \end{cases}$$

Entonces $\{\underbrace{x^2+2x-3, x^3-3x+2}_{\text{base de } S}, x^3-1, 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$

base de T.

Para que f no sea un isomorfismo, basta que f no sea un ~~[illegible]~~ monomorfismo (pues f es un endomorfismo). Luego $\{0\} \subsetneq Nu(f)$. Definimos f en una base:

$$\begin{aligned} (S) \ & f(x^2+2x-3) = x^2+2x-3 \\ & f(x^3-3x+2) = x^3-1 \\ (T) \ & f(x^3-1) = x^3-3x+2 \\ & f(1) = 0. \end{aligned} \quad \mathrm{I} \ \to S$$

Luego esta transf. lineal definida cumple que $f(S) = T$, $f(T) = S$ $\wedge$ $Nu(f) \neq \{0\}$

Esta es una f que satisface lo pedido. La transf lineal pedida es:

- $f(\underbrace{x^2+2x-3}_{\in S\cap T \subseteq S, T}) = x^2+2x-3 \ (\in T)$
- $f(\underbrace{x^3-3x+2}_{\in S}) = x^3-1 \ (\in T)$
- $f(\underbrace{x^3-1}_{\in T}) = x^3-3x+2 \ (\in S)$
- $f(1) = ~~[illegible]~~ \ 0$ (f no es isomorfismo).

Y está bien definida, ya que la definimos en una base de $\mathbb{R}_3[x]$

jercicio 3:

) Veamos que $f\circ g$ es un proyector, o sea $(f\circ g)^2 = f\circ g$.

$$(f\circ g)^2 = (f\circ g)\circ(f\circ g) \underset{\text{asoc}}{=} f\circ\underbrace{(g\circ f)}_{=f\circ g \text{ x hipótesis}}\circ g = f\circ(f\circ g)\circ g = \underbrace{(f\circ f)}_{\substack{=f\\ f \text{ proy}}}\circ\underbrace{(g\circ g)}_{\substack{=g\\ g \text{ proy}}} = f\circ g.$$

$\Rightarrow f\circ g$ es un proyector

b) Probemos ambas inclusiones:

$\subseteq$) Sea $v \in Im(f\circ g)$, quiero ver que $v\in Im(f) \wedge v \in Im(g)$.

Si $v\in Im(f\circ g) \Rightarrow \exists w\in V / (f\circ g)(w) = v$. ~~Luego~~ Recordemos que $v\in Im(f) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(v)=v$ (pues f es un proyector), entonces:

$$f(v) = f((f\circ g)(w)) = (f\circ(f\circ g))(w) = (\underbrace{f^2}_{=f}\circ g)(w) = (f\circ g)(w) = v \Rightarrow v\in Im(f)$$

$$g(v) = g((f\circ g)(w)) = (g\circ(f\circ g))(w) = ((\underbrace{g\circ f}_{=f\circ g})\circ g)(w) = ((f\circ g)\circ g)(w) =$$

$$= (f\circ \underbrace{g^2}_{=g})(w) = (f\circ g)(w) = v \Rightarrow v\in Im(g)$$

Luego $v\in Im(f)\cap Im(g) \Rightarrow$ como v era arbitrario:

$$Im(f\circ g) \subseteq Im(f)\cap Im(g).$$

$\supseteq$) Sea $v\in Im(f)\cap Im(g)$, entonces:

$$(f\circ g)(v) = f(g(v)) \underset{\substack{g \text{ proy.}\\ v\in Im(g)}}{=} f(v) \underset{\substack{f \text{ proy}\\ v\in Im(f)}}{=} v \Rightarrow v\in Im(f\circ g)$$

Luego: $Im(f\circ g) \supseteq Im(f)\cap Im(g)$

$\therefore$ $Im(f\circ g) = Im(f)\cap Im(g)$.

c) Probemos ambas inclusiones:

$\subseteq$) Sea $v\in Nu(f\circ g)$ quiero ver que $v\in Nu(f)+Nu(g)$.

~~[illegible]~~ $v = v - g(v) + g(v)$.

Claramente $g(v)\in Nu(f)$, pues $0 = (f\circ g)(v) = f(g(v))$.

Y como $v - g(v)\in Nu(g)$, ya que:

$$g(v-g(v)) = g(v) - g^2(v) = g(v) - g(v) = 0. \Rightarrow v-g(v)\in Nu(g)$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{v-g(v)}_{\in Nu(g)} + \underbrace{g(v)}_{\in Nu(f)} \in Nu(f)+Nu(g)$$

$$\Rightarrow Nu(f\circ g) \subseteq Nu(f)+Nu(g)$$

$\supseteq$) Sea $v\in Nu(f)+Nu(g) \Rightarrow \exists w_1\in Nu(f), w_2\in Nu(g) / v = w_1+w_2$.

~~Basta ver que $f(g(w_1))=0$~~ Entonces:

$$(f\circ g)(v) = f(g(w_1)) = \underbrace{(f\circ g)}_{=g\circ f}(w_1) = (g\circ f)(w_1) = g(0) = 0 \,. \Rightarrow v \in Nu(f\circ g)$$

$$\Rightarrow Nu(f) + Nu(g) \subseteq Nu(f\circ g)$$

$$\therefore \quad Nu(f\circ g) = Nu(f) + Nu(g).$$

Ejercicio 4:

a) i) $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$. Probemos ambas inclusiones:

$\subseteq$) Sea $\varphi \in (\mathrm{Im}(f))^\circ \Rightarrow \varphi(w)=0, \forall w \in \underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\mathrm{Im}(f)=\{f(v):\, v\in V\}} \Rightarrow \varphi(f(v))=0, \forall v \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow f^t(\varphi)(v)=0,\ v\in V \Rightarrow f^t(\varphi)=\underset{V^*}{\underset{\cap}{0}} \Rightarrow \varphi \in \mathrm{Nu}(f^t)$

$\Rightarrow (\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$

$\supseteq$) Sea $\varphi \in \mathrm{Nu}(f^t) \Rightarrow f^t(\varphi)=0 \Rightarrow f^t(\varphi)(v)=0, \forall v\in V \Rightarrow \varphi(f(v))=0, \forall v \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(w)=0, \forall w \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \varphi \in (\mathrm{Im}(f))^\circ$.

$\Rightarrow \mathrm{Nu}(f^t) \subset (\mathrm{Im}(f))^\circ$

$\therefore (\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$

ii) $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$. Probemos una inclusión y que ambos subespacios tienen la misma dimensión:

$\subseteq$) Sea $\varphi \in \mathrm{Im}(f^t) \Rightarrow \exists \psi \in W^* / f^t(\psi)=\varphi$. Sea $v \in \mathrm{Nu}(f)$, entonces:

$\varphi(v) = f^t(\psi)(v) = \psi(f(v)) = \psi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(v)=0, \forall v \in \mathrm{Nu}(f) \Rightarrow \varphi \in (\mathrm{Nu}(f))^\circ$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f^t) \subseteq (\mathrm{Nu}(f))^\circ$

Probemos que tienen las misma dimensión, sabemos que:

~~$\dim(W) = \dim(W^*) = \dim(\mathrm{Im}(f^t))$~~ Por el item i) $\dim(\mathrm{Im}(f))^\circ = \dim \mathrm{Nu}$

Entonces:

$\dim_k(W^*) = \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \dim_k(\mathrm{Nu}(f^t)) = \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \dim_k((\mathrm{Im}(f))^\circ) \overset{\text{Teo de la dim para anul.}}{=}$

$= \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \dim_k(W) - \dim_k(\mathrm{Im}(f)) \overset{\text{Teo de la dim. para transf. lineal}}{=}$

$= \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \underbrace{\dim_k(W^*)}_{=\dim_k(W)} - (\dim_k(V) - \dim_k(\mathrm{Nu}(f))) \overset{\text{Teo de la dim. para anuladores}}{=}$

$= \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \dim_k(W^*) - \dim_k((\mathrm{Nu}(f))^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_k(W^*) = \dim_k(W^*) + \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) + \dim_k((\mathrm{Nu}(f))^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_k(\mathrm{Im}(f^t)) = \dim_k((\mathrm{Nu}(f))^\circ)$

Luego: $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$

b) Si $T(v)=\lambda v \Rightarrow T(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow (T-\lambda\, id)(v) = 0 \Rightarrow$ ~~$(T-\lambda id)$~~.

$\Rightarrow v \in \mathrm{Nu}(T-\lambda\, id) \Rightarrow \dim_k(\mathrm{Nu}(T-\lambda\, id)) \geq 1 \Rightarrow$ Por el Teorema de la dimensión:

$\dim_k((\mathrm{Nu}(T-\lambda\, id))^\circ) = \underbrace{\dim_k V}_{=n} - \dim_k(\mathrm{Nu}(T-\lambda\, id)) \leq n-1$

Por el item a)

$\Rightarrow \dim_k((\mathrm{Nu}(T-\lambda\, id))^\circ) = \dim_k(\mathrm{Im}(T-\lambda\, id)^t))$

'or el teorema de la dimensión para t.l.

$$\dim_k(V^*) = \dim_k(Nu((T-\lambda id)^t)) + \dim_k(Im((T-\lambda id)^t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim_k(Nu((T-\lambda id)^t)) = \dim_k V^* - \dim_k(Im((T-\lambda id)^t)) \geq n-(n-1) = 1.$$

Por el item a):

$$1 \leq \dim_k(Nu((T-\lambda id)^t)) = \dim_k((Im(T-\lambda id))^\circ) \Rightarrow \underline{\exists \varphi} \in (Im(T-\lambda id))^\circ, \underline{\varphi \neq 0}.$$

tal que:

$$\varphi(w)=0, \ \forall w \in Im(T-\lambda id) \Rightarrow \varphi((T-\lambda id)v)=0, \ \forall v \in V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(T(v)) - \lambda\varphi(v)=0, \ \forall v\in V \Rightarrow T^t(\varphi)(v) = (\lambda\varphi)(v), \ \forall v \in V \Rightarrow T^t(\varphi)=\lambda\varphi.$$

Entonces, esa es la φ pedida.

jercicio nº 5:

i) Sean $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{C}_2[x]$. Probemos que es un producto interno ($\lambda \in \mathbb{C}$)

- $<f+g, h> = k\,(f+g)(0)\,\overline{h(0)} + \int_0^1 (f+g)'(x)\,\overline{h'(x)}\,dx =$

$$= k\,f(0)\overline{h(0)} + k\,g(0)\overline{h(0)} + \int_0^1 \left(f'(x)\overline{h'(x)} + g'(x)\overline{h'(x)}\right)dx =$$

$$= \left(k\,f(0)\overline{h(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{h'(x)}\,dx\right) + \left(k\,g(0)\overline{h(0)} + \int_0^1 g'(x)\overline{h'(x)}\,dx\right) =$$

$$= <f,h> + <g,h>$$

- $<\lambda f, g> = k(\lambda f)(0)\,\overline{g(0)} + \int_0^1 (\lambda f)'(x)\,\overline{g'(x)}\,dx =$

$$= \lambda\,k\,f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 \lambda f'(x)\overline{g'(x)}\,dx = \lambda\left(k f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx\right) =$$

$= \lambda <f,g>$ $\Rightarrow$ $<,>$ es lineal en la primera componente.

- $<f,g> = k\,f(0)\,\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\,\overline{g'(x)}\,dx \underset{k\in\mathbb{R}}{=} \overline{k\,g(0)\,\overline{f(0)}} + \overline{\int_0^1 g'(x)\overline{f'(x)}\,dx} =$ la integral del conjugado es el conjugado de la integral si $x \in \mathbb{R}$.

$$= \overline{k\,g(0)\overline{f(0)} + \int_0^1 g'(x)\overline{f'(x)}\,dx} = \overline{<g,f>} \Rightarrow <,> \text{ es hermitiano.}$$

- $<f,f> = k|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2dx \geq 0$, $\cancel{\text{pues } |f(0)|^2}$ si y sólo si $k>0$.

Pues si $k \leq 0$, tomamos $f = 1 \Rightarrow <1,1> = k \leq 0$, y como $1 \neq 0 \Rightarrow$ $<,>$ no sería un producto interno.

Si $k>0$, entonces: $k|f(0)|^2, \int_0^1 |f'(x)|^2dx \geq 0 \Rightarrow <f,f> \geq 0$.

Sea $f \in \mathbb{C}_2[x] / <f,f> = 0 \Rightarrow k|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq |f(0)|^2 = -\frac{1}{k}\int_0^1 |f'(x)|dx \leq 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f = a_1x + a_2x^2$.

$\Rightarrow \int_0^1 |f'(x)|^2dx = 0 \Rightarrow |f'(x)|^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow a_1x + a_2x^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

Luego $<,>$ es definido positivo $\Rightarrow$ si $k>0$ $<,>$ es un prod. interno.

b) Sabemos que: $\left([\langle\,,\,\rangle]_B\right)_{ij} = \langle x^{i-1}, x^{j-1}\rangle$, $\forall i,j$, $1\le i,j\le 3$. Entonces:

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{11} = \underset{\langle 1,1\rangle}{} k\cdot 1\cdot 1 + \int_0^1 0\cdot\bar{0}\,dx = k \quad\Rightarrow\quad \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{11} = k}$$

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{12} = \langle 1,x\rangle = k\cdot 1\cdot\bar{0} + \int_0^1 0\cdot\bar{1}\,dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{12} = 0}$$

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{13} = \langle 1,x^2\rangle = k\cdot 1\cdot\bar{0} + \int_0^1 0\cdot\overline{2x}\,dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{13} = 0}$$

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{22} = \langle x,x\rangle = k\cdot 0\cdot\bar{0} + \int_0^1 1\cdot\bar{1}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{22} = 1}$$

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{23} = \langle x,x^2\rangle = k\cdot 0\cdot\bar{0} + \int_0^1 1\cdot\overline{2x}\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{23} = 1}$$

$$\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{33} = \langle x^2,x^2\rangle = k\cdot 0\cdot\bar{0} - \int_0^1 2x\,\overline{2x}\,dx = 4\cdot\int_0^1 x^2\,dx = 4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\left([\langle\,,\rangle]_B\right)_{33} = \frac{4}{3}}$$

matríz hermitiana $\Rightarrow [\langle\,,\rangle]_B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ B no es una base ortogonal, pues $\langle x,x^2\rangle \neq 0$.

c) Vemos de lo anterior, que $1 \perp x$ y $1 \perp x^2$ $\Rightarrow$ $\langle x,x^2\rangle^{\perp} = \langle 1\rangle$.

La proyección ortogonal sobre $S = \langle x,x^2\rangle^{\perp}$ es:

$$p_S(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x + a_2x^2$$

La distancia de 1 a S es $\|p_{S^\perp}(1)\| = \|1 - p_S(1)\| = \|1\| = \langle 1,1\rangle^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow$ la distancia de 1 a $\langle x,x^2\rangle$ es 2.